

Подготовка к ГИА по математике



Задачи на растворы, смеси
и сплавы

Гурьева Ольга Николаевна, учитель
математики первой квалификационной
категории МБОУ «Гимназия №16
«Французская»

Текстовые задачи на растворы, смеси и сплавы

- В Презентации представлены текстовые задачи на растворы, смеси и сплавы, рассмотрены способы и алгоритмы их решения. Презентацию могут использовать учителя для подготовки выпускников к итоговой аттестации по математике.



Постановка проблемы

- Умение решать задачи на смеси может пригодиться каждому выпускнику в повседневной жизни. Например, нужно знать, как приготовить раствор удобрения для полива почвы на даче, как разбавить уксусную кислоту для маринования мяса, как правильно приготовить маринад для консервирования огурцов.
- Текстовые задачи на смеси входят в КИМы для проведения ОГЭ и ЕГЭ по математике, но выпускники испытывают трудности при решении таких задач. В чем проблема?

Достаточно ли задач?

- Математика

Класс	Количество задач	Способ решения
6 Виленкин	3	арифметический
7 – 9 Мордкович	13	алгебраический
10-11	0	0

- Химия

Класс	Уровень	Способ решения
8 – 11 Габриелян	базовый	арифметический
11 Габриелян	профиль	Правило Креста

Очевидно, что этого не достаточно для того, чтобы научиться решать сложные задачи на смешивание растворов различной концентрации.

Понятийный аппарат

Смесь – это система, состоящая из двух и более компонентов. Среди смесей можно выделить жидкие, твердые, газообразные: гидросфера, литосфера, атмосфера.

Объемы и массы смесей не могут быть отрицательными.

Закон сохранения объема и закон сохранения массы: Если два раствора (смеси) соединяют в новый раствор (смесь), то $V = V_1 + V_2$ – сохраняется объем; $m = m_1 + m_2$ – сохраняется масса.

ЦЕЛОЕ – масса смеси, выраженная в граммах, литрах или других мерах веса и объёма.

ЧАСТЬ – масса определённого вещества в составе смеси, выраженная в граммах, литрах или других мерах веса и объёма

ДОЛЯ – доля вещества в смеси, выраженная в процентах или дробью. 1 процент - одна сотая доля любого вещества.

«Доля»- есть отношение массы (объема) компонента смеси к массе (объему) всей смеси.

$$W(\text{комп.}) = m(\text{комп}) / m(\text{смеси}) \cdot 100\% \quad (1)$$

$$\text{или } \varphi(\text{газа}) = V(\text{газа}) / V(\text{смеси}) \cdot 100\%. \quad (2)$$

(процентное содержание чистого вещества в смеси).

Концентрация вещества, % содержание вещества и массовая доля вещества – эти понятия являются синонимами.

Сумма концентраций всех компонентов, составляющих смесь, равна 1.

- Все задачи на смеси можно разделить на три типа:
- - на вычисление концентрации (это ДОЛЯ);
- - на вычисление массы смеси (это ЦЕЛОЕ).
- - на вычисление количества чистого вещества в смеси (это ЧАСТЬ);

Способы решения задач на растворы, смеси и сплавы

- **Арифметический способ.**
 - М-6, Виленкин Н.Я.,
 - № 755. В сосуд налили 240г воды и положили 10 г соли. Найдите процентное содержание соли в растворе. Через некоторое время 50г воды испарилось. Какое стало процентное содержание соли в растворе? (2,стр.122).
 - Решение.
 - $240 + 10 = 250(\text{г})$ - ЦЕЛОЕ – это масса солёного раствора,
 - $10 : 250 = 0,04 = 4\%$ - процентное содержание соли в растворе,
 - $250 - 50 = 200(\text{г})$ - масса солёного раствора после испарения 50г воды,
 - $10 : 200 = 0,05 = 5\%$ - содержание соли в новом растворе.
 - Ответ: 4%, 5%.
- **Арифметический способ.** Химия, базов уровень 11кл
 - **Задача.** Сколько граммов воды надо добавить к 50г 70% уксусной эссенции, чтобы приготовить 3% уксус? (4,стр.106)
 - Решение. 1) $50 * 0,70 = 35\text{г}$ – кислоты в 50г уксусной эссенции
 - 2) $35 : 3 * 100 = 1170\text{г}$ – масса 3% уксуса
 - 3) $1170 - 50 = 1120\text{г}$ – масса воды.
Ответ: 1120г.

Алгебраический способ (уравнение или система уравнений).

А -7, Мордкович А.Г., всего три задачи на смеси №14.34*, №14.35*, №100.

- №14.34* (7, стр.79) Имеются две отливки стали двух сортов, одна из которых содержит 5%, а другая – 10% никеля. Сплавив их вместе, получили отливку, содержащую 8% никеля. Найдите массу каждой отливки до переплавки, если известно, что вторая отливка содержала никеля на 4т больше, чем первая. Решение. Пусть X т–масса никеля 1 отливки, а масса никеля второй– $(X+4)$ т. Значит, масса 1 отливки $20X$ ($5\%=1/20$), масса второй отливки - $10(X+4)$.

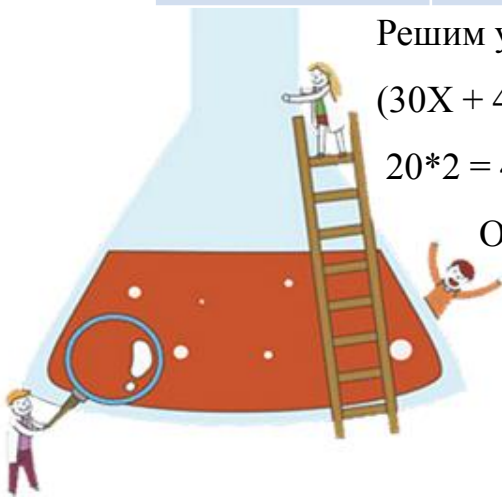
	Масса отливки	% содержание никеля	Масса никеля
1 отливка	$20X$	5%	X
2 отливка	$10(X+4)$	10%	$(X+4)$
Сплав	$20x+10(x+4)$	8%	$(2x+4)$

Решим уравнение: $(20X + 10(X-4)) * 0,08 = (2x+4)$

$(30X + 40)*0,08 = 2X+4$, $0,04X = 0,8$ $X=2$ т – масса никеля в 1 отливке

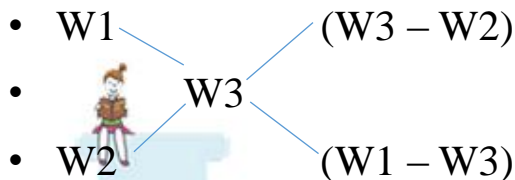
$20*2 = 40$ т -масса 1 отливки, $10*(2+6) = 60$ т- масса 2 отливки.

Ответ:40т, 60т



Диагональная схема «правило смешения» или «правило креста».

- **Задача.** (6, стр. 97, 11 кл, хим. профиль).
- Из сосуда, доверху наполненного 91% раствором кислоты, отлили 2 литра и долили 2 литра 55% раствора этой же кислоты. В сосуде получился 79% раствор кислоты. Сколько литров вмещает сосуд? Решение.
- Отношение массы первого раствора к массе второго равно отношению разности массовых долей смеси и второго раствора к разности массовых долей первого раствора и смеси.

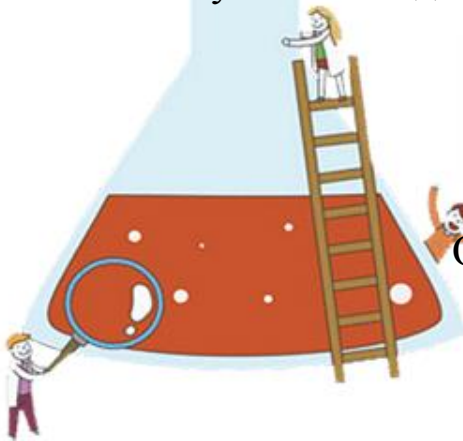


- По условию задачи составляем схему:

$$\begin{array}{ccc}
 0,91 \setminus & & / 0,24 \\
 & 0,79 & \\
 0,55 / & & \setminus 0,12
 \end{array}
 \quad
 \frac{m_1}{m_2} = \frac{0,24}{0,12} = \frac{2}{1}$$

Отлили 2 литра (m_2), значит $m_2 = 2$ л, $m_1 = 4$ л.

Ответ: 6л.

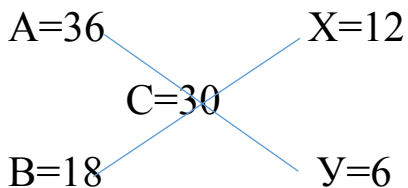


Метод Пирсона в журнале «Квант».

- **Задача.** Пусть имеются две партии сливок: одна содержит 36% жира, а другая – 18% жира. Требуется определить, сколько надо взять тех и других сливок, чтобы получить смесь с количеством жира 30%.

- **Решение.** Решим методом Пирсона.
 $Y = A - C = 36 - 30 = 6,$

$$X = C - B = 30 - 18 = 12.$$



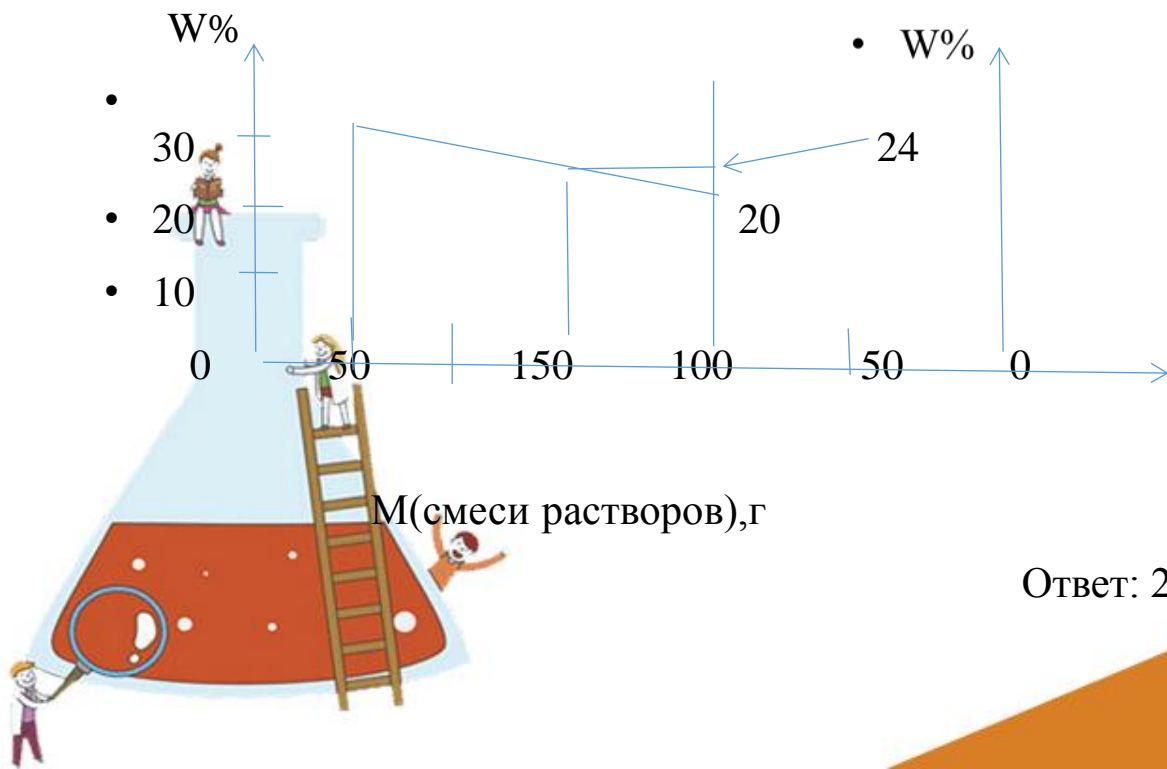
Значит, на 6 частей второй партии надо взять 12 частей первой партии.

Описание метода

- Рисуют квадрат и проводят его диагонали. А-большый показатель (левый верхний угол),
- В-меньший показатель (левый нижний угол),
- С-требуемый показатель ставят на пересечении диагоналей.
- Затем производят вычитание по первой диагонали и находят количество второй части смеси $Y = A - C$; из центра производят вычитание по второй диагонали и находят количество первой части смеси $X = C - B$. Записываем X и Y в правом верхнем и правом нижнем углах. На X частей первого вещества надо взять Y частей второго, тогда получится смесь с показателем С.

Графический способ

- Графический способ решения задач на смеси хорошо описан в пособии автора Ерыгина Д.П. «Методика решения задач по химии» (6,стр.40).
- Задача №4-24. Смешаны 100г 20% раствора и 50г 32% раствора некоторого вещества. Какова массовая доля растворенного вещества в полученном растворе? Решение. Масса полученной смеси: $100+50=150$ г. Строим график.

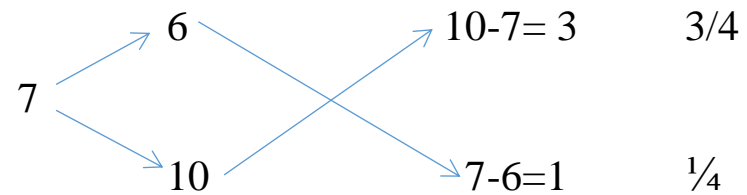


Ответ: 24%.

Способ Л.Ф.Магницкого

- **Задача.** Сборник «Арифметика» - первая в России учебная энциклопедия по математике (ресурс 19).
- У некоторого человека были на продажу масла двух сортов: одно ценою 10 гривен за ведро, другое – 6 гривен за ведро. Захотелось ему сделать из этих двух масел, смешав их, масло ценою 7 гривен за ведро. Какие части этих двух масел нужно взять, чтобы получить ведро масла ценою 7 гривен?

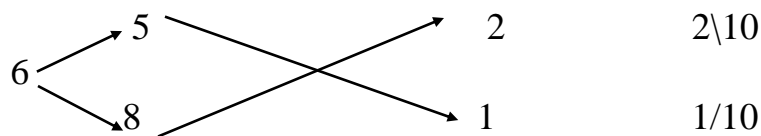
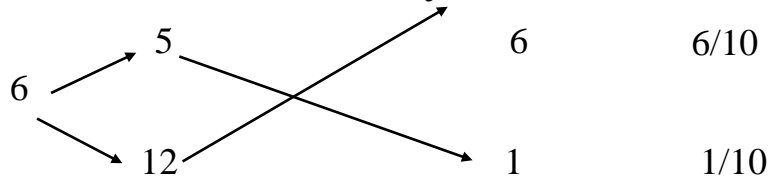
Решение. Рисуем схему:



Из схемы делаем вывод, что дешевого масла нужно взять втрое больше, чем дорогого, т.е. для получения одного ведра ценою 7 гривен нужно взять дорогого масла $\frac{1}{4}$ ведра, а дешевого масла $\frac{3}{4}$ ведра.

Способ Л.Ф.Магницкого для 3 веществ

Некто имеет чай 3 сортов – цейлонский по 5 гривен за фунт, индийский по 8 гривен за фунт и китайский по 12 гривен за фунт. В каких долях нужно смешать эти сорта, чтобы получить чай стоимостью 6 гривен за фунт? Решение. Рисуем две схемы:



- Из схем понятно, что надо взять: $6+2=8$ частей чая ценой по 5 гривен и по одной части ценой 8 гривен и 12 гривен за один фунт.
- Возьмем $8/10$ фунта чая ценой по 5 гривен за фунт и по $1/10$ фунта чая ценой 8 и 12 гривен за фунт, то получим 1 фунт чая ценой:
- $8/10 \cdot 5 + 1/10 \cdot 12 + 1/10 \cdot 8 = 6$ гривен
- Ответ: $8/10$ фунта чая ценой по 5 гривен за фунт и по $1/10$ фунта чая ценой 8 и 12 гривен за фунт

Приравнивание площадей равновеликих прямоугольников

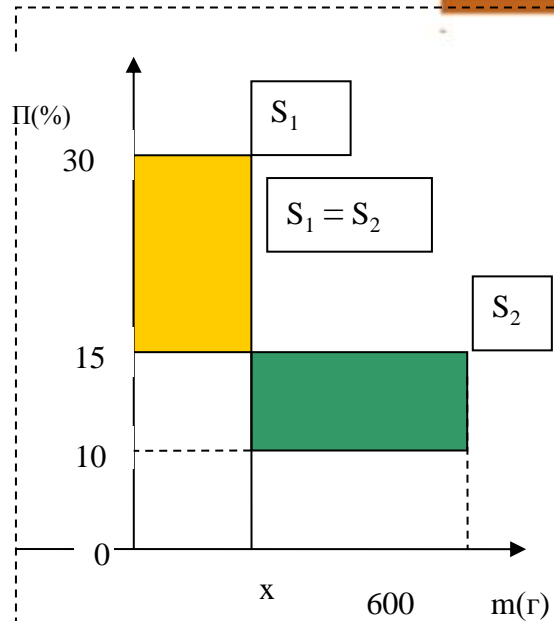
- Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-ым раствором и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора надо было взять?
- Решение 1: Обозначим за x массу первого раствора, тогда масса второго $(600 - x)$.
- Составим уравнение:
$$30x + 10 * (600 - x) = 600 * 15$$
Отсюда, $x = 150$.

Решение2. Приравнивание площадей равновеликих прямоугольников

$$15x = 5 (600 - x)$$

$$x = 150$$

Ответ: 150г 30% и 450 10% раствора

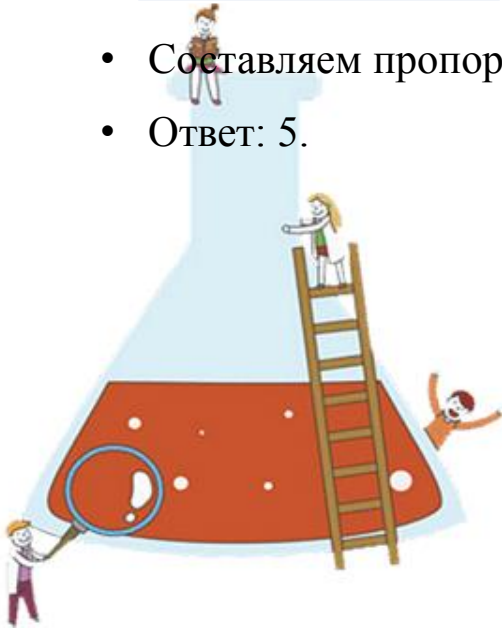


Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

- **99571.** В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
- Решение. Пусть X % концентрация получившегося раствора.

12% 5л		$X-0$
	X % 12л	
0% 7л		12- x

- Составляем пропорцию: $x : (12-x) = 5:7$, $7x = 60 - 5x$, $x = 5$.
- Ответ: 5.



Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

- **99573.** Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
- Решение. Пусть $X\%$ концентрация получившегося раствора.

25% 6л		$X-15$
	$X\% \quad 10\text{л}$	
15% 4л		$25-x$

Составляем пропорцию: $6:4 = (X-15):(25-x)$, $X=21$. Ответ: 21%.



Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

- **99576.** Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

- Решение. Пусть масса первого сплава — x кг, тогда масса второго сплава $(x+3)$ кг, а масса третьего сплава $(x + x + 3)$ кг.

Составляем пропорцию: $20 : 10 = (x+3) : x$,
 $2:1 = (x+3) : x$, $2x = x+3$, $x = 3$,
 $2x + 3 = 9$ кг
Ответ: 9 кг.

40%	$(x+3)$ кг		$(30 - 10) = 20$
		30%	$(2x + 3)$ кг
10%	x кг		$(40 - 30) = 10$

Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

- **99577.** Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?
- Решение. Пусть масса первого раствора – x кг, а масса второго раствора y кг. Составим систему уравнений.

$6x + (-24y) + 360 = 0$ – это первое уравнение системы.

30% x кг		$36 \cdot 10$
60% y кг	36% $(x + y + 10)$ кг	$(36 - 60)y = -24y$
0% 10 кг		$6 \cdot x$

Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

30% хкг		-9*10
60% укг	41% (х + у + 10)кг	-19у
50% 10кг		11х

$11x - 19y - 90 = 0$ – это второе уравнение системы.

Решая систему методом сложения, получим, что $25y = 750$, $y = 30$.

$x - 4 \cdot 30 + 60 = 0$, $x = 60$.

Ответ: 60.

Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

- **99578.** Имеется два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?
- Решение. Пусть X % концентрация первого раствора, тогда y % -концентрация второго раствора, а концентрация третьего 68%.

$x\%$ 30кг		68-y
	68% 50кг	
$y\%$ 20кг		X-68

- Составляем пропорцию: $30 : 20 = (68-y) : (x-68)$, $3*(x-68)=2*(68-y)$,
 $3x + 2y = 340$ – это первое уравнение системы.



Решение задач из открытого банка заданий ЕГЭ

- Пусть 1 и 2 раствора взяли по 1 кг (равные массы этих растворов), тогда концентрация получившегося раствора – 70%, а масса – 2 кг.

x% 1кг		70-у
	70% 2кг	
y% 1кг		X-70

Составляем пропорцию: $1 : 1 = (70-y) : (x-70)$, $70-y = x-70$,

$x + y = 140$ – это второе уравнение системы.

Составим систему.

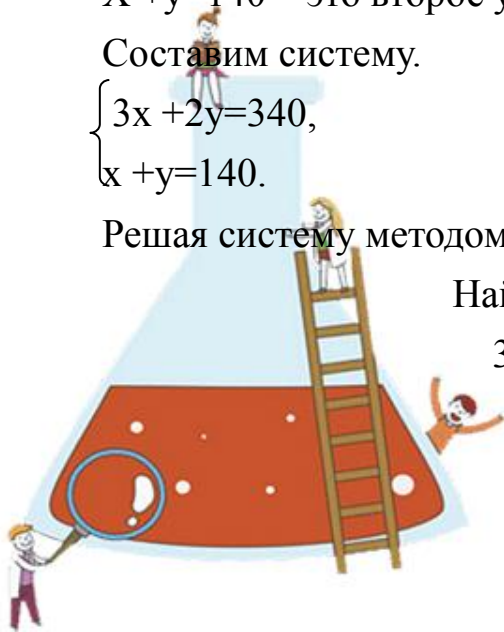
$$\begin{cases} 3x + 2y = 340, \\ x + y = 140. \end{cases}$$

Решая систему методом сложения, получим, что $x = 60\%$

Найдем 60% от 30 кг.

$$30 * 60 : 100 = 18 \text{ кг.}$$

Ответ: 18 кг.



Решение задач из сборника Сканави М.И.

- **Задача 13.002.** Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0.5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?
- Решение. В целлюлозной массе содержится $0,85 \cdot 500 = 425$ кг воды.
- Пусть выпарено x кг воды, тогда получим $425 - x = 0,75(500 - x)$, откуда получаем $x = 200$ (кг). Решение методом Пирсона

85%	-25
500	75%
	500-x
100%	10
-x	

$$500 : x = 25 : 10;$$

$$5000 = 25x;$$

$$X = 200 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 200 (кг) (12, стр. 813)

Решение задач из сборника Сканави М.И.

- **Задача. 13.008.** Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%.
- Решение-Квадрат Пирсона.

5% 30 кг		1,5
	1,5% (30+x) кг	
0% x кг		3,5

- $30:x=1,5:3,5;$
- $30*3,5=1,5x;$
- $105=1,5x; \quad x=70.$
- Ответ: 70 кг(12,стр.815).

Решение задач из сборника Сканави М.И.

- **Задача. 13.045.** Кусок сплава меди и цинка массой 36кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди? Решение. Пусть чистой меди взяли X кг.

100% X кг		15
	60% $36 + X$ кг	
45% 36кг		40

- $15:40 = X:36$,
- $3:8 = x:36$,
- $3*36 = 8*X$,
- $X=108:8=13,5$ кг.
- Ответ: 13,5кг(12,стр.829).

Сборник авторских задач на смеси

5 класс

- **Задача 4.** Определить концентрацию раствора 50граммов сахара в 450граммах воды.
- **Задача 5.** Сколько граммов йода содержится в 200г 4%-го спиртового раствора йода?
- **Задача 6.** Бетон применялся при возведении Великой Китайской стены в III в. до н.э. Длина Великой Китайской стены составляет 8851,8 километров. Ширина стены колеблется от 5 до 8 метров, а высота в некоторых местах достигла отметки в 10 метров. Для приготовления бетона смешивают воду, цемент, песок и щебень в отношении 2:4:9:17. Сколько песка понадобится для приготовления 8т бетона? (Удивительно, для строительства 0,1м китайской стены уходило примерно 8т бетона, т.к. 45л бетона весит 100кг, но 8т бетона хватит на фундамент для бани!).
- **Задача 7.** В 150 г 40%-ного раствора соли добавили 300 г её 10%-ного раствора. Определите процентную концентрацию раствора.
- **Задача 8.** Для приготовления клюквенного морса взяли 200г клюквы, 150г сахара и 1л воды (1л воды имеет массу 1кг). Каково процентное содержание сахара в морсе?
- **Задача 10.** Сироп от кашля содержит 21% сахара. Сколько граммов воды нужно добавить к 100г сиропа, чтобы содержание сахара составило 12%?
- **Задача 12.** Пчёлы перерабатывают цветочный нектар в мёд, освобождая его от воды. Нектар содержит 82% воды, а полученный из него мёд — 19%. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчёлам для получения одного килограмма мёда?

Сборник авторских задач на смеси

6 класс

- **Задача 1.** В 220г воды растворили 30г сахара. Какова концентрация сахара в растворе?
- **Задача 2.** Смешали творог 25% жирности и нежирный творог, который содержит 2,5% жира. Определите процент жирности полученной творожной массы, если смешали:
 - а) 1 кг жирного и 2 кг нежирного
 - б) 2 кг жирного и 1 кг нежирного
- **Задача 3.** Клубничный сироп содержит 20% сахара, а смородиновый - 60%. Сколько граммов первого и второго сиропов нужно взять, чтобы получить 100 г сиропа с 50% содержанием сахара?
- **Задача 4.** Для приготовления молочного коктейля используют молоко, жирностью 5%, и мороженое, жирность которого 15%. Сколько граммов мороженого нужно взять, чтобы получить 500 граммов коктейля, жирность которого 10%?
- **Задача 5.** Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов чистой воды нужно добавить к 20 кг морской, чтобы содержание солей в полученном растворе составило 2% ?
- **Задача 11.** В новогоднем подарке шоколадные конфеты «Новосибирские» составляют 65%, а в другом новогоднем подарке - 60%. Матвей перемешал оба подарка. Какова масса второго подарка, если пакет с подарками весит 2,5 кг, а шоколадные конфеты составляют в нем 62%.
- **Задача 12.** Школьники собрали 10 кг свежих цветков календулы, влажность которых 85%. После сушки влажность цветков составила 25%. Сколько кг сухих цветков календулы школьники сдали в аптеку?

Сборник авторских задач на смеси

7- 8 класс

- **Задача 1.** Смешали клубничный сироп, содержащий 40% сахара, и малиновый сироп, содержащий 20% сахара. Сколько граммов каждого сиропа взяли, если получили 360 г ягодного коктейля с содержанием сахара 30%?
- **Задача 3.** В пакете находится 400 г мюсли, состоящей из сухофруктов и овсяных хлопьев. Какова масса овсяных хлопьев, если сухофруктов в этой смеси содержится 22 %?
- **Задача 5.** Для приготовления торта «Любимый» бабушка взяла 5 г 40% - ого раствора лимонной кислоты. Какова масса 10% - ого и 70% - ого растворов лимонной кислоты, которые она смешала, чтобы получить раствор нужной концентрации?
- **Задача 7.** Из 10 кг абрикосов получается 8 кг кураги, содержащей 42% воды. Сколько процентов воды содержат свежие абрикосы?
- **Задача 9.** . Из салона красоты мама отправилась к ювелиру, взяв с собой украшения из серебра 875 и 960 пробы, и попросила ювелира изготовить ей цепочку 925 пробы. Помогите ювелиру определить пропорцию, в которой нужно объединить сплавы.
- **Задача 11.** Для приготовления сливок домохозяйке требуется молоко с 5% жирностью. У домохозяйки имеется молоко 8%-ой и 3%-ой жирности. В какой пропорции ей надо смешать данное молоко, чтобы приготовить сливки?
- **Задача 13.** Свежие яблоки содержат 80% воды, а сушеные 10%. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 6 кг сушеных?

Литература

- 1. Азия, А.П. Вольпер, И.М. Квадрат Пирсона. Квант. 1973, № 3.
- 2. Виленкин Н.Я. Математика. 5 класс. 6 класс Учебники для общеобразовательных учреждений, М.: Мнемозина, 2014
- 3. Габриелян О.С. Химия 8 кл М, Дрофа, 2013
- 4. Габриелян О.С. Химия 11 кл М, Дрофа, 2013
- 5. Габриелян О.С. Химия профильный уровень 11 кл М, Дрофа, 2008
- 6. Ерыгин Д.П. «Методика решения задач по химии». Учебное пособие для студентов пед. институтов. М. Просвещение, 1989.
- 7. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений, М.: Мнемозина, 2009
- 8. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений, М.: Мнемозина, 2010
- 9. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений, М.: Мнемозина, 2010
- 10. Перельман Я.И. «Занимательная алгебра»
- 11. Прокопенко Н. Задачи на смеси, растворы и сплавы / Библиотека «Первое сентября» 2009, №31
- 12. Сканин М.И. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы. М. Мир и образование, 2002
- 13. <http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege> Открытый банк заданий ЕГЭ-2016
- 14. <http://mathege.ru/or/ege/ShowProblems?offsetStr=36&posMask=1024&showProto=true>
- 15. http://kvant.mccme.ru/1973/03/kvadrat_pirsona.htm
- 16. <http://mathemlib.ru/> 'MathemLib.ru: Математическая библиотека
- 17. Открытый банк задач ЕГЭ по математике.
- 18. <http://egemaximum.ru/v14-zadachi-na-smesi-i-splavy/>