Применение метода рационализации при решении неравенств

Казанцева Л.П., учитель математики
МБОУ «Лицей№136»

Типичные ошибки при решении данного задания:

- невнимательное чтение математической записи неравенства;
- непонимание алгоритма решения;
- небрежность при отображении множеств на координатной прямой;
- неумение применять метод интервалов при решении неравенств повышенного и высокого уровней сложности;
- некорректное использование систем и совокупностей;
- забыт знаменатель при решении дробно-рационального неравенства.

С чего начать подготовку к решению задачи 15

- ***равносильные неравенства*** — неравенства, множества решений которых совпадают;
- ***равносильные преобразования*** — такие действия с неравенством, при совершении которых мы заменяем данное неравенство равносильным ему, но более простым.

Рациональный метод решения неравенств – метод равносильных преобразований по знаку (метод декомпозиции – Моденов В.П., метод замены множителей – Голубев В.И.)

Суть метода рационализации для решения логарифмических и показательных неравенств состоит в том, что в ходе решения осуществляется переход от неравенства, содержащего логарифмические и показательные выражения, к равносильному рациональному неравенству(или равносильной системе рациональных неравенств).

Алгоритм метода рационализации

1. Выписать условия, задающие ОДЗ.
2. Привести исходное неравенство к виду $\dfrac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} \vee 0,$

   то есть справа должен стоять 0, а все возможные слагаемые в левой части необходимо привести к общему знаменателю (если среди них встречаются дроби).
3. Указать ограничения исходного неравенства.
4. По возможности заменить все выражения u_i и u_k на более простые, совпадающие по знаку с исходными.
5. Решить полученное неравенство.
6. Учитывая ограничения, записать ответ исходного неравенства.

Метод рационализации в логарифмических неравенствах

- Таблица работает при условии :f›o,g›o,h›o,h≠1

$\log_h f \;\vee\; \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \vee 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \vee 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$

- где f и g— функции от x,
- h— функция или число,
- V— один из знаков ≤,›,≥,‹

Заметим также, вторая и третья строчки таблицы — следствия первой.

И еще несколько полезных следствий :

$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \vee 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$

- где f и g — функции от x,
- h— функция или число,
- V— один из знаков ‹,≥,≤,›

- Рассмотрим таблицы, позволяющие рационализировать показательный неравенства .
- **Таблица для рационализации в показательных неравенствах:**
- f и g— функции от x, h— функция или число, V— один из знаков ›,≤,≥,‹.Таблица работает при условии h›0,h≠1.

$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1)\cdot f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(f-g)\cdot h \vee 0$
$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$

- Опять же, по сути, нужно запомнить первую и третью строчки таблицы. Вторая строка -частный случай первой, а четвертая строка — частный случай третьей.

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих модуль

№	Выражение *F*	Выражение *G*
1.	$\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert \vee 0$	$(f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) \vee 0$
2.	$\lvert f(x)\rvert \vee 0$	$f^2(x) \vee 0$

Решите неравенство:

$$|x^2 - 8x + 15| \geqslant |x^2 + 2x - 15|.$$

$$(x^2 - 8x + 15 - x^2 - 2x + 15)\times(x^2 - 8x + 15 + x^2 + 2x - 15) \geqslant 0.$$

$$(-10x + 30)(2x^2 - 6x) \geqslant 0.$$

$$x(x - 3)^2 \leqslant 0.$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup \{3\}$$

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих иррациональность

№	Выражение *F*	Выражение *G*
1.	$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\vee 0$	$f(x)-g(x)\vee 0$
2.	$\sqrt{f(x)}\vee 0$	$f^{2}(x)\vee 0$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3(5-2x)}}{\sqrt{x+5}-3}\geq 0$$

Решение

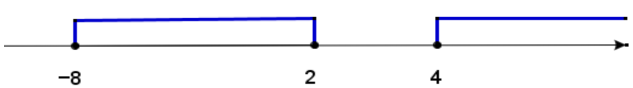
$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3(5-2x)}}{\sqrt{x+5}-3}\geq 0$$

- $$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3(5-2x)}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{9}}\geq 0$$

$$\frac{x^2-1-3(5-2x)}{x+5-9}\geq 0$$

$$\frac{x^2+6x-16}{x-4}\geq 0$$

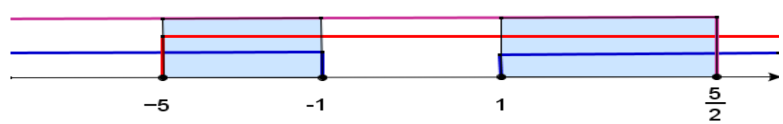
$$\frac{(x+8)(x-2)}{x-4}\geq 0$$

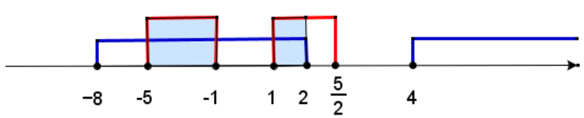


Ограничения

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x+5\geq 0 \\ 3(5-2x)\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq \dfrac{5}{2} \\ (x-1)(x+1)\geq 0 \\ x\geq -5 \end{cases}$$





$$[-5;-1]\cup[1;2]$$

«Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно»

А.Н.Колмогоров.