Нестандартные методы решения математических задач

Свойства функций в задачах с параметрами

М.С. Рожнева, учитель математики
МБОУ «Инженерный лицей НГТУ»

Новосибирск 2021

Задачи с параметрами относятся к задачам повышенного уровня сложности, которые предлагаются как на Едином государственном экзамене, так и на дополнительных конкурсных экзаменах в ВУЗы.

Они играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры. Затруднения, возникающие при их решении, связаны с тем, что каждая задача с параметрами представляет собой целый класс задач, для каждой из которых должно быть получено решение.

Классы задач с параметрами

- Задачи, в которых необходимо решить неравенство или уравнение при всех возможных значениях параметра.

- Задачи, в которых необходимо найти не все возможные решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Основные типы задач с параметрами

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее заданному множеству.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Основные типы задач с параметрами

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Задача 1

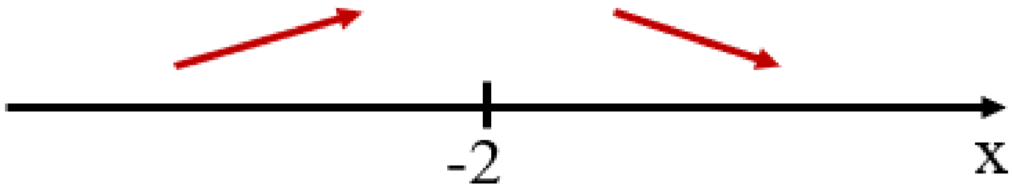
При каких значениях a существует только одно решение уравнения $3x+\left|2x+\left|x-a\right|\right|=7\left|x+2\right|$?

Решение. Найдем нули подмодульного выражения $x+2=0,\ x=-2$

Введем функцию $y=3x+\left|2x+\left|x-a\right|\right|-7\left|x+2\right|$

Раскроем модули, запишем функцию, на каждом из полученных промежутков и определим ее поведение.

$$y = 3x + \left|2x + |x - a|\right| - 7|x + 2|$$



1) При $x \le -2$ $\quad y = 3x \pm 2x \pm x \pm a + 7x + 14,$

$\mathrm{k} = 3 \pm 2 \pm 1 + 7 > 0 -$ функция возрастающая

2) При $x \ge -2$ $\quad y = 3x \pm 2x \pm x \pm a - 7x - 14,$

$\mathrm{k} = 3 \pm 2 \pm 1 - 7 < 0 -$ функция убывающая

Таким образом, функция непрерывна и возрастает при $x \le -2$, а убывает при $x \ge -2$.

Так как необходимо найти одно решение, то искомыми значениями a являются те, при которых $x = -2$.

Подставим данное значение x в уравнение:

$$-6 + \left|-4 + \left|-2 - a\right|\right| = 0,$$

$$\left|-4 + \left|-2 - a\right|\right| = 6,$$

Раскроем внешний модуль и получим:

$$\left[\begin{array}{l} -4 + \left|2 + a\right| = -6, \\ -4 + \left|2 + a\right| = 6 \end{array}\right.$$

Так как первое уравнение в совокупности не имеет решений, решаем второе уравнение:

$$|2+a|=10,$$

$$\left[\begin{array}{l} 2+a=10, \\ 2+a=-10, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=8, \\ a=-12. \end{array}\right.$$

Ответ: при $a=8, a=-12$ существует только одно решение уравнения.

Задача 2

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$3x^5+11x+4|x-a+3|+2|3x+a-5|+\sqrt[3]{4x+5}+25\le 0$$

выполняется для всех значений x из отрезка $[-4;-1]$?

<u>Решение.</u> Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$y(x)=11x+4|x-a+3|+2|3x+a-5|$$

, которая монотонно возрастает , так как угловой коэффициент $\mathrm{k}=11\pm4\pm6>0.$

Функция

$$f\left(x\right)=3x^5+11x+4\left|x-a+3\right|+2\left|3x+a-5\right|+\sqrt[3]{4x+5}$$

также монотонно возрастает.

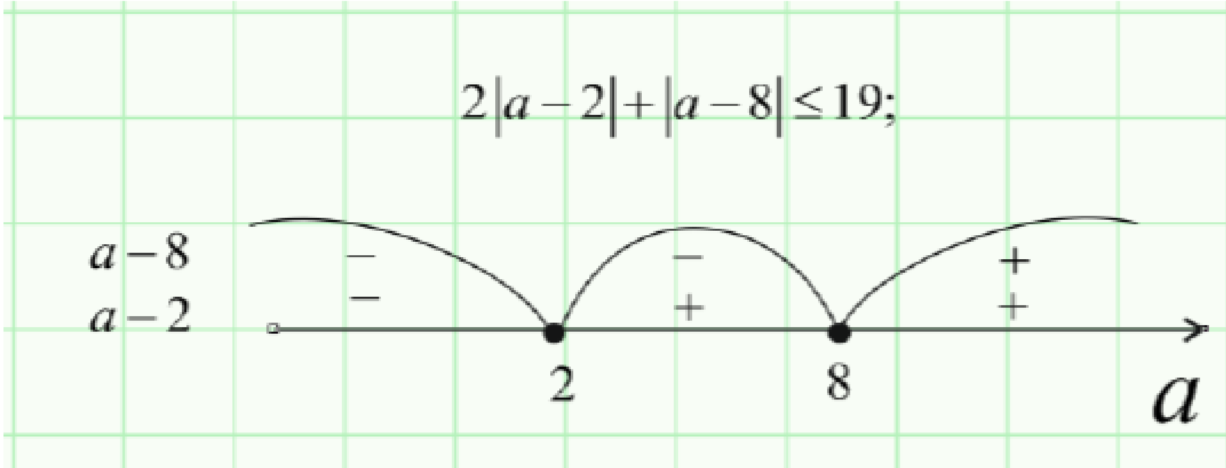
Функция $f\left(x\right)$ определена на всей числовой прямой.

Неравенство $f\left(x\right)\le 25$ будет выполнено при всех значениях x на отрезке $\left[-4;-1\right]$ тогда и только тогда, когда $f\left(-1\right)\le 25$.

$$f\left(-1\right)=4\left|-a+2\right|+2\left|a-8\right|-13\le 25,$$

$$2\left|a-2\right|+\left|a-8\right|\le 19.$$

Определим знаки подмодульных выражений



Составим таблицу

Раскроем модули на числовых промежутках:

Числовые промежутки	$a<2$	$2\le a\le 8$	$a>8$
Раскрываем модули, в зависимости от знака подмодульного выражения	$-2(a-2)-(a-8)\le 19;$	$2(a-2)-(a-8)\le 19;$	$2(a-2)+(a-8)\le 19;$
Решаем неравенства	$a\ge -\frac{7}{3};$	$a\le 15;$	$a\le \frac{31}{3};$
Находим пересечения промежутков	$-\frac{7}{3}\le a<2;$	$2\le a\le 8$	$8<a\le \frac{31}{3};$

Объединим решения, получим $-\frac{7}{3} \le a \le \frac{31}{3}$

Ответ: при $-\frac{7}{3} \le a \le \frac{31}{3}$ данное неравенство

выполняется для всех значений х из отрезка $[-4; -1]$.

Задача 3

При каких значениях параметра p существует решение уравнения $4\sin^2 x + \cos x - p + 1 = 0$?

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$4\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x - p + 1 = 0,$$

$$4-4\cos^2 x+\cos x - p + 1 = 0,$$

$$-4\cos^2 x+\cos x - p + 5 = 0$$

Пусть $\cos x = t, -1 \le t \le 1$

$$-4t^2 + t - p + 5 = 0,$$

$$4t^2 - t + (p - 5) = 0,$$

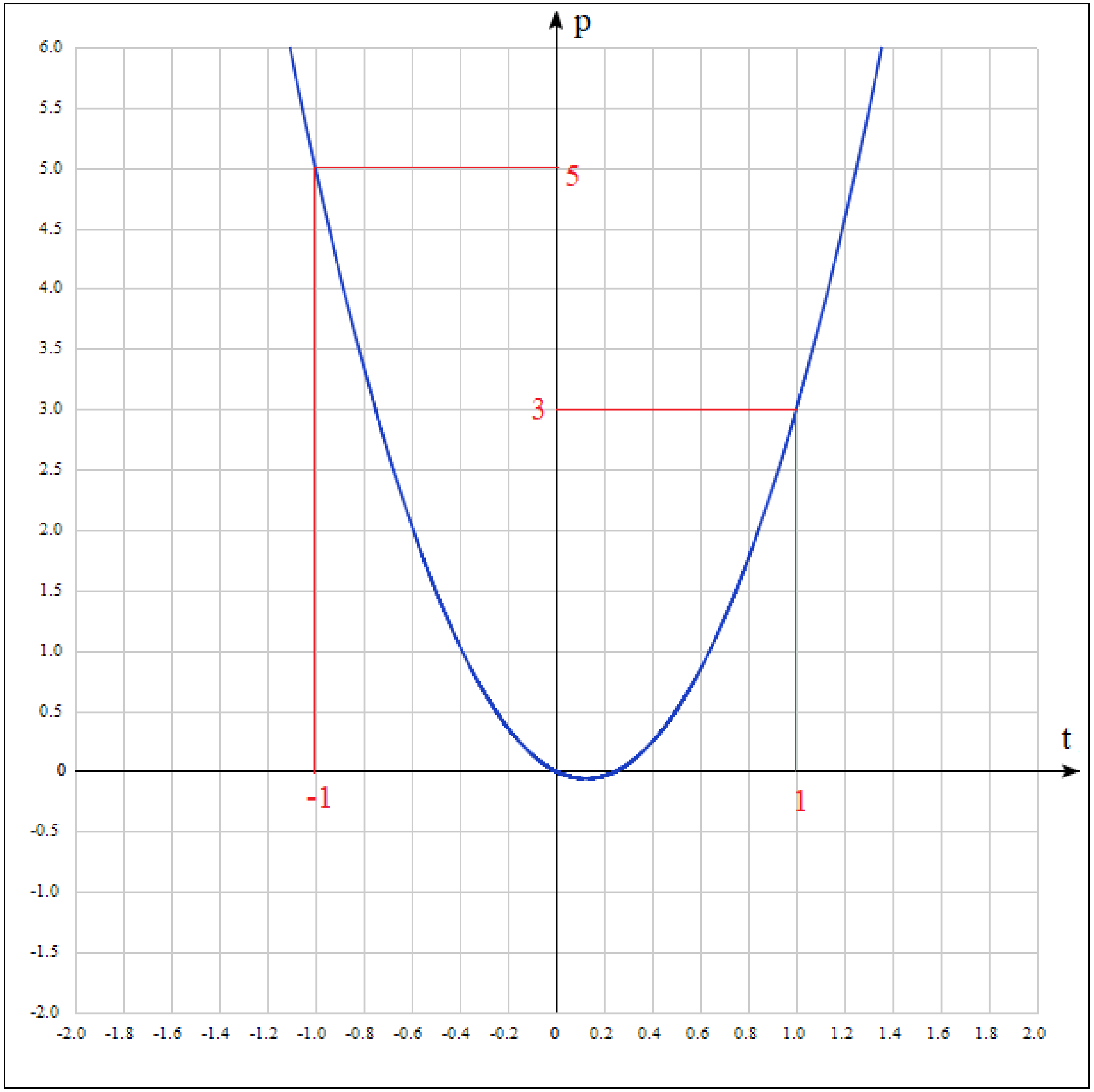
$$4t^2 - t = -p + 5$$

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$t_{верш.} = \frac{1}{8},\ p\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}$$

Если $t=-1$, то $4(-1)^2+1=5$

Если $t=1$, то $4\cdot1-1=3$



Тогда $$-\frac{1}{16} \le -p + 5 \le 5,$$

$$-\frac{1}{16} - 5 \le -p \le 0,$$

$$0 \le p \le \frac{81}{16}.$$

Ответ: при $0 \le p \le \frac{81}{16}.$ уравнение будет иметь решение.

Нестандартные методы решения математических задач

Свойства функций в задачах с параметрами

М.С. Рожнева, учитель математики
МБОУ «Инженерный лицей НГТУ»

Новосибирск 2021