Решение логических задач

Литвинов В.Н., учитель информатики и ИКТ
МБОУ « Лицей № 136»

Задания на логику в ЕГЭ по информатике

2	Умения строить таблицы истинности и логические схемы	**Б**
18	Знание основных понятий и законов математической логики	**П**
23	Умение строить и преобразовывать логические выражения	**В**

Основные формулы

Формулы де Моргана

- $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Импликация

- $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

Эквивалентность

- $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Связь логики и теории множеств

- **пересечение** множеств $\cap$ соответствует логическому умножению, а **объединение** $\cup$ – логическому сложению;
- **пустое множество** $\varnothing$ – это множество, не содержащее ни одного элемента;
- **универсальное множество** I – это множество, содержащее все возможные элементы заданного типа (например, все целые числа)
- **дополнение множества** $\bar{X}$ – это разность между универсальным множеством I и множеством X

Два типа задач с множествами

- **Задача 1.** Пусть требуется выбрать множество A так, чтобы выполнялось равенство $\boldsymbol{A + X = I}$; в этом случае множество A должно включать дополнение $\neg \boldsymbol{X}$, то есть $\boldsymbol{A} \geq \neg \boldsymbol{X}$

  или $\boldsymbol{A_{min} = \neg X}$

- **Задача 2.** Пусть требуется выбрать множество A так, чтобы выполнялось равенство $\boldsymbol{\neg A + X = I}$, в этом случае множество $\neg \boldsymbol{A}$ должно включать дополнение $\neg \boldsymbol{X}$, то есть $\neg \boldsymbol{A} \geq \neg \boldsymbol{X}$, отсюда $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{X}$,

  то есть $\boldsymbol{A_{max} = X}$

Задание 18

Возможные варианты заданий:

- с отрезками
- с множествами
- с делителями
- с побитовыми операциями

Задание 18: (задача с отрезками)

P = [37; 60] *и* *Q* = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что выражение

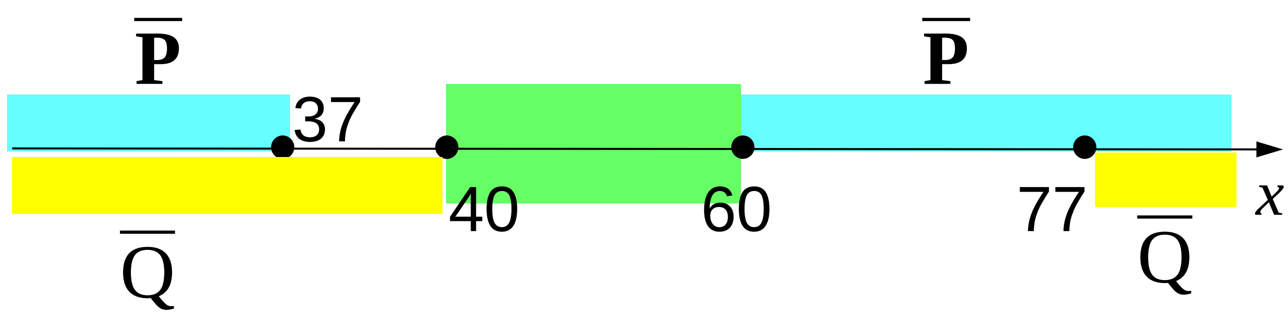
$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинно, то есть равно 1 при любом значении переменной x.

$$\mathbf{P} = (x \in P), \qquad \mathbf{Q} = (x \in Q), \qquad \mathbf{A} = (x \in A)$$

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}}) \qquad \overline{\mathbf{P}} + (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

$$\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} \qquad \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} = 1$$



Ответ: 20

Задание 18: (ТР 2017)

$P = [10; 34]$ *и* $Q = [18; 40]$. Отрезок A таков, что формула истинна при любом значении переменной x.

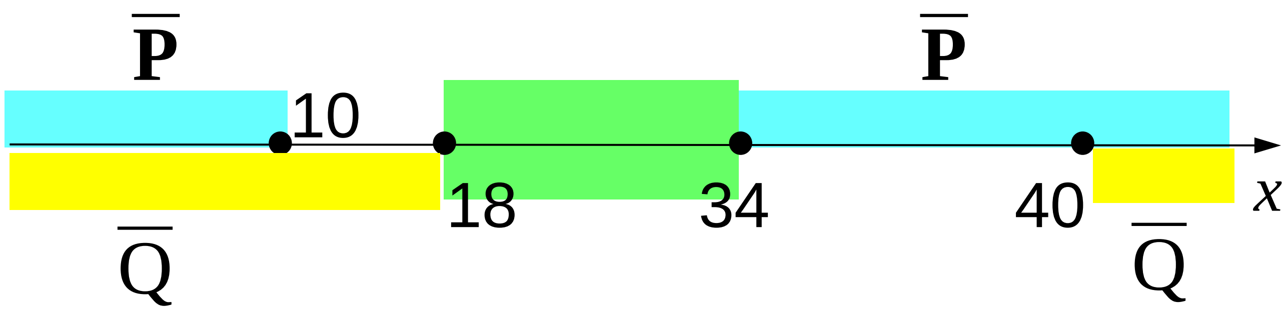
$$\neg(x \in A)) \to ((x \in P) \to \neg(x \in Q))$$

Какое наименьшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок А?

$$\mathbf{P} = (x \in P), \qquad \mathbf{Q} = (x \in Q), \qquad \mathbf{A} = (x \in A)$$

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\mathbf{P} \to \overline{\mathbf{Q}}) \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{P} \to \overline{\mathbf{Q}})$$

$$\mathbf{A} + (\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}}) = \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} \qquad \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} = 1$$



Ответ: 8

Задание 18: (задача с множествами)

Множество A: натуральные числа. Выражение

$$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{4, 8, 12, 116\}) \wedge \neg(x \in \mathrm{A})) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$$

истинно при любом значении x. Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

$$\mathbf{P} = x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\},$$

$$\mathbf{Q} = x \in \{4, 8, 12, 116\}, \qquad \mathbf{A} = x \in A$$

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}}) \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \{4, 8, 12\}$$

Ответ: 24

Задание 18: (задача с множествами)

Элементами множества *A, P* и *Q* являются натуральные числа, причем:

$$\mathbf{P} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$\mathbf{Q} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

Известно, что выражение:

$$\mathbf{((x\in A) \to \neg(x\in P))\wedge(\neg(x\in Q)\to\neg(x\in A))}$$

истинно при любом значении X. Определите наименьшее возможное количество элементов множества A.

$$(\mathbf{A} \to \overline{\mathbf{P}})\cdot(\overline{\mathbf{Q}} \to \overline{\mathbf{A}}) \quad \Rightarrow \quad (\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{P}})\cdot(\mathbf{Q} + \overline{\mathbf{A}})$$

$$= \overline{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{Q} + \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q} + \overline{\mathbf{P}}\cdot\overline{\mathbf{A}} \Rightarrow \overline{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{Q} + 1 + \overline{\mathbf{P}}) + \overline{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{A}_{\max} = \overline{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q} = \{3, 9, 15, 21, 24, 27, 30\}$$

Ответ: 7

Задание 18: (задача с делителями)

Для какого наибольшего натурального числа А выражение

$$\neg ДЕЛ(x, А) \rightarrow (\neg ДЕЛ(x, 21) \wedge \neg ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинно (принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)

Обозначим: **A = ДЕЛ(x, A), P = ДЕЛ(x, 21), Q = ДЕЛ(x, 35)**

$$\overline{A} \rightarrow (\overline{P} \cdot \overline{Q}) \Rightarrow A + \overline{P} \cdot \overline{Q} \qquad A_{min} = \overline{\overline{P} \cdot \overline{Q}} = P + Q$$

***P* =** {21, 42, 63, 84, …} – множество всех чисел, которые делятся на **21**

***Q* =** {35, 70, 105, …} – множество всех чисел, которые делятся на **35**

***P + Q* =** {21, 35, 42, 63, 70…} – числа, которые делятся на **21** или на **35**.

A = **ДЕЛ(x, A).** Каким должно быть А, чтобы получить множество **P + Q**?

A = **1, 2, 3, 5, 7, 14, 15, 21**…

Почему А не может быть числом **1, 2, 3, 5, 14**, … ?

Ответ : 7

Задание 18: (задача с делителями)

Для какого наименьшего натурального числа А выражение

$$\text{ДЕЛ}(x, \text{А}) \to (\neg\text{ДЕЛ}(x, 21) \lor \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинно (принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)

Обозначим: $\mathbf{A} = \text{ДЕЛ}(\mathbf{x}, \mathbf{A})$, $\mathbf{P} = \text{ДЕЛ}(\mathbf{x}, 21)$, $\mathbf{Q} = \text{ДЕЛ}(\mathbf{x}, 35)$

$$\mathbf{A} \to (\overline{\mathbf{P}} \lor \mathbf{Q}) \Rightarrow \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} \qquad \mathbf{A}_{\max} = \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}$$

***P* =** {21, 42, 63, 84, …} – множество всех чисел, которые делятся на **21**

***Q* =** {35, 70, 105, …} – множество всех чисел, которые делятся на **35**

¬*P* + *Q* = {21, 35, 42, 63, 70…} – множество чисел, которые не делятся на **21** плюс множество чисел, которые делятся на **35**.

А = ДЕЛ(x, А). Каким должно быть А, чтобы получить множество **¬ P + Q**? **А** = **1, 2, 3, 5, 7, 14, 15, 21**…

Почему А не может быть числом **1, 2, 3, 7, 14**, … ?

Ответ : 5

Задание 18. (побитовые операции)

"&" – побитовая конъюнкция (И). Логическое выражение

$$(x \,\&\, 25 \neq 0) \to ((x \,\&\, 17 = 0) \;\to\; (x \,\&\, A \neq 0))$$

истинно при любом натуральном x. Определите наименьшее возможное значение A.

$$\mathbf{P} = (x \,\&\, 25 \neq 0), \qquad \overline{\mathbf{Q}} = (x \,\&\, 17 = 0),$$

$$\mathbf{A} = (x \,\&\, A \neq 0)$$

$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q}} \to \mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{P}} + (\overline{\mathbf{Q}} \to \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \;\; \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 1$$

Это типовая задача с множествами (Задача 1)

$$\mathbf{A}_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}} = \mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$$

Задание 18. (Решение)

"&" – побитовая конъюнкция (И). Выражение

$$(x \,\&\, 25 \neq 0) \rightarrow ((x \,\&\, 17 = 0) \rightarrow (x \,\&\, A \neq 0))$$

истинно при любом натуральном x. Определите наименьшее возможное значение A.

```
номер бита      4 3 2 1 0
       25  =  11001
       17  =  10001
     Amin  =  01000
```

$$\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$$

$P = (x \,\&\, 25 \neq 0)$ $\Rightarrow$ хотя бы один из битов {*4, 3, 0*} равен 1

$\overline{\mathbf{Q}} = (x \,\&\, 17 = 0)$ $\Rightarrow$ биты {4, 0} должны быть равны нулю

$A = (x \,\&\, A \neq 0)$ $\Rightarrow$ бит {3} должен быть равен единице

В числе **A** нужно обязательно сделать единичными биты, которые равны 1 в числе **P** и равны 0 в числе **Q**.

Ответ: 8

Задание 23

- Решение можно рассматривать как цепочку нулей и единиц длиной *N*. Такие цепочки называют **битовыми цепочками**, или **битовыми векторами**.
- При анализе систем логических уравнений удобно не исключать поочередно неизвестные, а рассматривать битовый вектор–решение как целое, как единый объект.
- Рассмотрим вначале **простые примеры**.

Пример 1

Найти число решений уравнения:

$$(x_1 = x_2) \wedge (x_2 = x_3) \wedge \ldots \wedge (x_4 = x_5) = 1.$$

Решение:

- Все “сомножители” имеют форму ($\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x_{i+1}}$), они должны быть равны 1. Это значит, что любые два соседних бита должны быть равны. Существует всего две таких цепочки:
- *000000, 111111.*

Ответ: 2

Пример 2

Найти число решений уравнения:

$$\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge ... \wedge \neg(x_5 = x_6) = 1.$$

Решение:

- Все “сомножители” имеют форму $\neg(x_i = x_{i+1})$, они должны быть равны 1. Это значит, что каждые два соседних бита должны быть различны, то есть 0 и 1в битовой цепочке чередуются. Существует всего две таких цепочки: *101010, 010101*.

Ответ: 2

Пример 3

Найти число решений уравнения:

$$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge \ldots \wedge (x_5 \to x_6) = 1$$

Решение (вариант 1):

- Все импликации: $(x_1 \to x_2)$, ..., $(x_5 \to x_6)$ должны быть истинны. Импликация $a \to b$ ложна только при a=1 и b=0. Поэтому, если битовый вектор $X = x_1\ x_2 \ldots\ x_6$ — решение данного уравнения, и в нем встретилась единица, то правее нее будут только единицы (сочетание “10” запрещено!).
  Таким образом, уравнение имеет семь решений:
  000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111, 111111.

Ответ: 7

Пример 3

Найти число решений уравнения:

$$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge \ldots \wedge (x_5 \to x_6) = 1$$

Решение (вариант 2): Запишем уравнение в виде системы уравнений:

$(x_1 \to x_2) = 1$
$(x_2 \to x_3) = 1$
…
$(x_5 \to x_6) = 1.$

Для первого уравнения $(x_1 \to x_2)=1$ существует 3 решения: *00, 01, 11*. Для системы из двух уравнений существует 4 решения: 000, 001, 011, 111. Для системы уравнений, в которой есть ***n*** переменных число решений равно ***n+1***.

Ответ: 7

Пример 4

Найти число решений уравнения:

$(\neg\, x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge \ldots \wedge (x_{1022} \vee x_{1023}) = 1$

Решение

Запишем $(\neg x_1 \vee x_2)$ в виде $(x_1 \to x_2)$ и представим выражение в виде системы уравнений:

$(x_1 \to x_2)=1$

…

$(x_{1022} \vee x_{1023}) = 1$

Для системы уравнений, в которой есть ***n*** переменных число решений равно ***n+1***.

Ответ: 1024

Пример 5

Найти число решений уравнения:

$$((x_1 \vee x_2) \to x_3) \wedge ((x_2 \vee x_3) \to x_4) \wedge \ldots \wedge ((x_4 \vee x_5) \to x_6) = 1$$

Решение: Все сомножители имеют форму $((x_i + x_{i+1}) \to x_{i+2})$, они должны быть равны 1, то есть недопустима импликация $1 \to 0$. Поскольку левая часть импликации — это логическая сумма двух соседних битов, а правая — следующий за ними бит, можно сделать вывод: слева от каждого нулевого бита (начиная с третьего) должны обязательно стоять два нуля. Этому условию удовлетворяют цепочки вида все нули, потом — все 1:

000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111, 1111111.

И еще одна цепочка: 101111. Всего 8 цепочек.

Ответ: 8

Задания из демо вариантов ЕГЭ

- Покажем, как использовать подход с использованием свойств **битовых цепочек** для решения систем логических уравнений из демонстрационных и тренировочных вариантов ЕГЭ по информатике (ФИПИ и СтатГрад).

Задание 23 (демо)

Сколько различных решений имеет система уравнений

- $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) = 1$
- $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_3) \wedge (y_3 \to y_4) = 1$
- $(z_1 \to z_2) \wedge (z_2 \to z_3) \wedge (z_3 \to z_4) = 1$
- $x_1 \wedge y_2 \wedge z_3 = 0$

где $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_4,$ – логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных **x1, x2, ... x4, y1, y2, ... y4, z1, z2, ... z4,** при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

(использование свойств битовых цепочек)

Перепишем систему уравнений с более понятными обозначениями

$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4) = 1$

$(y_1 \to y_2)\cdot(y_2 \to y_3)\cdot(y_3 \to y_4) = 1$

$(z_1 \to z_2)\cdot(z_2 \to z_3)\cdot(z_3 \to z_4) = 1$

$\mathbf{x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0}$

где $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_4,$ – логические переменные?

Решение

(использование свойств битовых цепочек)

- Первые 3 уравнения однотипны; рассмотрим первое из них: $(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4) = 1$

- Рассмотрим решение этого уравнения как битовую цепочку $X = \mathbf{x_1, \ldots, x_4}$
- Все импликации должны быть равны 1, в цепочке *X* запрещена комбинация 10, поэтому после первой единицы далее следуют только единицы;

  Число решений равно ***n+1***, вот все 5 решений *X*:
- *X* = 0000 0001 0011 0111 1111

Решение
(использование свойств битовых цепочек)

- Второе и третье уравнения не зависят от первого и имеют такую же структуру;
- Вот все решения:
- X = 0000 0001 0011 0111 1111
- Y = 0000 0001 0011 0111 1111
- Z = 0000 0001 0011 0111 1111
- Если бы система состояла бы только из первых трёх уравнений, общее количество решений было бы равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Решение

(использование свойств битовых цепочек)

- Теперь рассмотрим последнее уравнение, связывающее *X*, *Y* и *Z*:

$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$

- таким образом, нужно исключить все решения, где $x_1 = y_2 = z_3 = 1$
- у нас есть одно решение *X* с $x_1 = 1$, два решения *Y* с $y_2 = 1$ и три решения *Z* с $z_3 = 1$;
- Поэтому из 125 нужно отбросить 1·2·3 = 6 решений; остаётся 125 – 6 = 119 решений

Ответ: 119

Задание 23 (ТР 2017)

Сколько различных решений имеет система уравнений

- $\neg(x_1 \wedge y_2) \vee (x_2 \wedge y_2) = 1$
- $\neg(x_2 \wedge y_2) \vee (x_3 \wedge y_3) = 1$
- $\neg(x_3 \wedge y_3) \vee (x_4 \wedge y_4) = 1$
- $\neg(x_4 \wedge y_4) \vee (x_5 \wedge y_5) = 1$

где $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$ – логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных **x1, x2, ... x5, y1, y2, ... y5**, при которых выполнена данная система равенств.

В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

(использование свойств битовых цепочек)

Перепишем систему уравнений используя свойство импликации:

- $(x_1 \wedge y_1) \rightarrow (x_2 \wedge y_2) = 1$
- $(x_2 \wedge y_2) \rightarrow (x_3 \wedge y_3) = 1$
- $(x_3 \wedge y_3) \rightarrow (x_4 \wedge y_4) = 1$
- $(x_4 \wedge y_4) \rightarrow (x_5 \wedge y_5) = 1$

Выполним замену переменных:

$z_1 = \boldsymbol{x_1 \cdot y_1}$, $z_2 = \boldsymbol{x_2 \cdot y_2}$, …, $z_5 = \boldsymbol{x_5 \cdot y_5}$

Решение
(использование свойств битовых цепочек)

После замены переменных получаем систему уравнений:

- $z_1 \to z_2 = 1$
- $z_2 \to z_3 = 1$
- $z_3 \to z_4 = 1$
- $z_4 \to z_5 = 1$

которую можно свернуть в одно уравнение:

$$(z_1 \to z_2)\cdot(z_2 \to z_3)\cdot(z_3 \to z_4)\cdot(z_4 \to z_5) = 1$$

Решение
(использование свойств битовых цепочек)

- В каждой скобке запрещена комбинация $1 \to 0$, это значит, что цепочка имеет структуру «сначала все нули, потом все единицы». Число решений равно ***n+1,*** вот все шесть цепочек длиной 5: **00000 00001 00011 00111 01111 11111**
- Теперь нужно перейти к исходным переменным, то есть, к цепочкам $X = x_1x_2x_3x_4x_5$ и $Y = y_1y_2y_3y_4y_5$
- Пусть $z_i = \mathbf{x_i} \cdot \mathbf{y_i} = 0$, конъюнкция равно нулю в трех случаях. Это означает что каждый ноль в цепочке Z даёт три решения в исходных переменных.

Решение
(использование свойств битовых цепочек)

- Теперь исследуем вариант $z_i = x_i \cdot y_i = 1$, конъюнкция равно единице только в одном случае. Это означает что каждая единица в цепочке Z даёт одно решение в исходных переменных.
- Таким образом, каждый ноль в цепочке увеличивает в три раза число решений в исходных переменных, а единицы не меняют их количества. Например, цепочка $Z = 111111$ не содержит нулей и даёт только одно решение

Решение
(использование свойств битовых цепочек)

- цепочка Z = *11111* не содержит нулей и даёт 3^0 одно решение
- цепочка *Z* = *01111* содержит один ноль и даёт 3^1 = 3 решения
- цепочка *Z* = *00111* содержит два ноля и даёт 3^2 = 9 решений и т.д.

- Общее количество решений системы:

$3^0+ 3^1+ 3^2+ 3^3+ 3^4+ 3^5 = 1+3+9+27+81+243 = 364$

Ответ: 364

Подготовка к ЕГЭ по информатике

ЕГЭ
2017
информатика

- шагать по пути знаний
- искать истину
- запоминать осмысленное
- применять знания

Спасибо за внимание!